

第五階段 – 我能數到100！

前提：能夠輕鬆地數到100，並且有很好的數感，尤其是懂得使用位值。同時能夠紮實地掌握個位數字加減法的心算。

回顧所學內容.....

您的孩子現在可以數到100了！他們可以輕鬆地進行一位數字加減法的心算，還可以從任意數字開始計數或跳數，該技能提高與延伸使他們能夠進行一位數與兩位數的加減。他們可以比較兩個兩位數的大小，也初步認識了十位和個位數的位值。

隨著孩子跳數能力的提高，他們也在開始發展 2、3、4、5 和 10 乘數的技能。奇數和偶數的概念現在對他們來說更加清晰、有意義了。

可以將之前章節的活動延伸到這些更大的數字上：第三章：形狀求和，數字再往上增加；第四章：戰爭-兩位數的加減法、差異三角與總和三角、更改錯誤、從數字1和10開始的跳島、填空比較、求和正方形以及加法金字塔。

本章的新概念.....

- **數到200** – 看看 100 到 200 的數字，來認識一下百位。
- **跳數到 100** – 這並不是新知識，但這是一個需要加強的重要技能。
- **展開式和位值** – 這是一項基礎技能，因此需要進一步加強。
- **兩位數加減法** – 跳數可以幫我們輕鬆進行兩位數的加減。
- **一位數乘法** – 是時候學習 6、7、8 和 9 乘法了。
- **矩形面積 = 長 × 寬** – 這個本身就是一個重要的數學概念。這個知識點還能夠為很多有趣的遊戲和涉及乘法與因式分解的謎題提供訣竅。
- **因式分解** – 您的孩子將學習數字如何分解成因數的奇妙之處。1 是一個單位。大於 1 且僅能被 1 和自身整除的自然數是質數；大於 1 且不是質數的數是合數。3 的平方是 3×3 。3 的立方是 $3 \times 3 \times 3$ 。3 的冪是指將 3 乘以自身很多次——例如，3 的四次方是 $3 \times 3 \times 3 \times 3$ 。
- **因數、約數和倍數** – 3 可以整除 12。這使得 3 成為 12 的因數或約數，而 12 是 3 的倍數。3 是 12 和 15 的公因數，而 12 是 4 和 6 的公倍數。
- **一位數除法** – 您的孩子將透過在乘法問題中找出缺失的因數來間接學習除法。
- **乘法和除法的運算族** – 我們將在該階段加強這兩種運算之間的聯繫。例如， $2 \times 5 = 10$ 、 $5 \times 2 = 10$ 、 $10 \div 2 = 5$ 和 $10 \div 5 = 2$ 構成了一個乘除法運算族（一組相關的數學算式，使用相同的數字，但運算不同）。

法律條款

每個家庭都應該有機會共同學習數學並以此為樂。Early Family Math 為家庭和教育工作者提供這些學習材料，供其編輯、翻譯、複製和分發，無需徵求許可，僅限於非商業用途。插圖注釋：Chris Wright。

© 初期家庭數學版權所有 2024 v.2.0 知識共享：Attribution-NonCommercial 4.0 國際許可

心算乘法

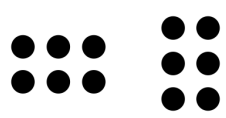
前提：熟練地進行一位數加減法、跳數和倍數運算

引入

這些教學方法提供了學習一位數乘法的結構化策略。您的孩子應該已經掌握將任何數字加倍、按任何數字跳數以及乘以 5 和 10。

$3 \times 4 = 4 \times 3$

您的孩子已經非常熟悉加法，因此 $2 + 3$ 等於 $3 + 2$ 這一點並不難理解。雖然不太明顯，但乘法也是一樣的道理。

 這個例子表明，兩排三個圓點和三排兩個圓點是相同的——只是改變了觀察角度！你以什麼順序乘以這兩個數字並不重要，你得到的答案是相同的。

這個很酷的觀察意味著您的孩子只需要掌握大約一半的乘法運算——一旦您的孩子知道了 3×4 ，他們也就知道了 4×3 。

平方數

就像雙胞胎加法是最受歡迎的數學運算方法一樣，平方通常也是乘法中最受歡迎的。學習平方運算能夠為學習其他乘法打下基礎。

多 1 或少 1

當與其他早期學過的技能相結合時，「多 1」或「少 1」（個數字）的策略對於做其他乘法運算是有幫助的。

例如， 9×7 比 10×7 少 1 個 7。因此， $9 \times 7 = 70 - 7 = 63$ 。這適用於所有 9 的倍數。類似地， 3×7 比 7 的兩倍多 1 個 7，因此 $3 \times 7 = 7 + 14 = 21$ 。這適用於所有 3 的倍數。

乘以 9

雖然乘以 9 已經涵蓋在上一策略中，但單拎出來講也很有意思。如果你按順序寫出 9 的倍數，你會發現十位數始終比你相乘的數字小 1，而個位數加上十位數始終等於 9！

位值和加法遊戲

前提：了解兩位數的位值以及它與加法和比較的關係

組成100



準備工作 給每位玩家一張紙，上面有 7 行 3 列。列標題分別為「十位數」、「個位數」和「累計總和」。

遊戲規則 每位玩家的累計總和從 0 開始。擲一個骰子或隨機抽取一張從 1 到 9 的撲克牌。每位玩家可以選擇將這個數字放在當前行的個位數或十位數的列中。例如，如果抽到 4，可以將其當成是 4 或 40。所選數字將添加到累計總和中。

獲勝條件 累計總和超過目標值 100 的玩家「爆牌」並輸掉遊戲。如果雙方都沒有爆牌，則累計總和更接近 100 的玩家獲勝。

變體

此遊戲有多種變體：

- 使用不同的目標數字。
- 使用更多或更少行。
- 超過目標值時不爆牌；兩邊累計總和更接近的玩家獲勝。
- 使用第四列「百位數」來熟悉三位數。
- 從目標數字開始，減到 0 來練習減法。

占領地盤



準備工作 一張標有數字 0 到 99 的數軸（大家一起分享）

遊戲規則 每位玩家輪流進行。在您的回合，從卡片 0 到 9 中隨機抽取兩張，可以自由選擇它們的順序，組成一個兩位數 (0 - 99)。將你生成的兩位數標註在數軸上的相應位置。

獲勝條件 第一個在規定區域內標註四個數字，且這些數字區間內沒有對手數字的玩家獲勝。

變體

此遊戲還可以在數字 000 和 999 間進行。

位值、加法和減法

前提：理解兩位數的組成及其與加法和比較的關係

相連群組.....



智力遊戲

7	9	9	6
6	4	4	7
2	5	11	2
6	1	7	5

13

這種數學謎題有兩個版本。

版本一：類似於第三章的「求和群組」，但目標和更大。棋盤可以是任意大小的，這裡我們使用 4 x 4 的棋盤。將目標數字寫在左邊，本例中是 13。

挑戰：找到相鄰且相加的目標和（13）為數字

版本二：這是一個 4x4 的棋盤，目標數字是 20。和「求和群組」一樣，棋盤上填滿了能組成目標數字的數字對或三個數字。然而，現在有一個格子不參與任何組合。

挑戰：找到這個沒有參與任何組合的數字。本例中，這個數字是「5」。

7	9	7	4
8	4	4	16
12	5	9	6
13	7	7	7

20

缺失的數字.....



智力遊戲

製作步驟 選取簡單的加法或減法算式，並省略其中的一些數字。如果你不小心省略了太多數字，可以引導孩子討論所有可能的解。例如，如果我們開始算式是 $2 + 5 = 7$ ，並且省略了第一個和第三個數字，那麼 $? + 5 = ?$ 就有多個解。

舉個例子：以下兩個算式通過省略一些數字，變成了「缺失數字」謎題。

$$\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array} \quad \begin{array}{r} 73 \\ -46 \\ \hline 27 \end{array} \quad \dashrightarrow \quad \begin{array}{r} _3 \\ +46 \\ \hline 6_ \end{array} \quad \begin{array}{r} 7_ \\ -_6 \\ \hline 27 \end{array}$$

字母代換謎題：這些謎題為使用簡單變數提供了一個易於理解的墊腳石。當孩子熟練掌握這些謎題後，他們就可以嘗試解答本章稍後要介紹的「字母代換」謎題了。

乘法卡和乘法表

前提：熟練掌握所有一位數的乘法運算

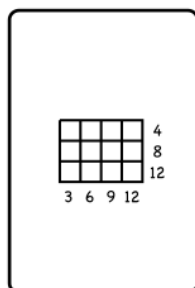
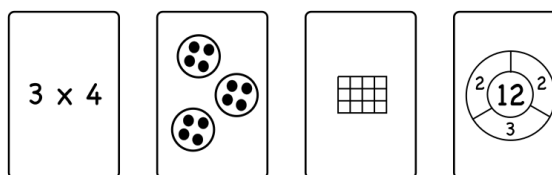
製作乘法卡.....



活動

利用製作乘法卡的方式，和孩子一起玩早先學過的配對遊戲 (階段1：配對釣魚和記憶挑戰賽；階段2：賓果遊戲；階段3：燙手山芋；階段4：金拉米) 的同時練習乘法運算。

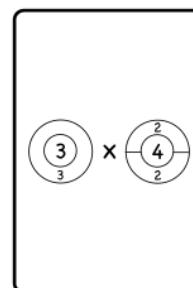
製作步驟：為每個乘法算式製作四張卡片：1. 算式；2. 物體組合；3. 陣列圖；4. 質因數分解。表示算式 3×4 的四張卡片如下：



選項：可以只包含 3×4 ，而不包含 4×3 。需要注意的是，看到 4 組 3 個物體和看到 3 組 4 個物體是不同的概念。

陣列圖卡可以沿著一側或兩側標註跳數序列，幫助孩子練習跳數。

算式卡可以將每個數字替換成其質因數分解的符號。這樣可以讓孩子更容易理解乘法運算中質因數分解是如何結合起來的。



揭示乘積.....



智力遊戲

X	5	3	7	8
2	10	6	14	16
9	45	27	63	72
8	40	24	56	64
5	25	15	35	40

製作步驟：準備一個空白表格，有 4 行 4 列，用來填寫乘積。表格上方和左側還有四個缺失數字的組 (可能重複)，這些數字包含 2 到 9 之間的部分數字。在孩子看不到的情況下填滿表格，然後翻轉或遮蓋數字。

挑戰：孩子一次可以最多揭開 16 個乘積中的 10 個。目標是在用完所有次數之前找到頂部和左側的數字。

舉個例子：假設所有卡片都翻轉了，如果孩子選擇翻開下面寫著 63 的卡片，他們就會知道它是 7 和 9 的乘積。翻開同一行或同一列的任何其他卡片都會顯示 7 和 9 在哪裡。假設他們翻開的第二張卡片是 56，那麼第三列一定是 7，第二行也是 9，第三行是 8。

因數和倍數

前提：熟練掌握所有一位數的乘法運算

隱藏因數和倍數



準備工作： 備好一個標有 1 到 24 的數字棋盤和兩種棋子：一個用於「最後一步」的特殊棋子，另一堆是普通棋子。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24

遊戲規則： 第一位玩家可以選擇任意一個數字，並用「最後一步」棋子將其蓋住。之後，該玩家用普通棋子替換「最後一步」棋子，並將「最後一步」棋子移動到任何一個為上一步數字的因數或倍數的數字上。

獲勝條件： 被迫蓋住數字 1 的玩家即為輸家。

舉個例子： 下圖展示了遊戲進行到一半的場景，遊戲從 10 開始，10 -> 5 -> 15 -> 3。

變體

隨著孩子對這個遊戲逐漸熟練，他們會發現一些合理的首步竅門。最基本的規則是，首步不能落在前半部分的質數上。

根據玩家的技能水準調整數字範圍，範圍可以是 1 到 30、1 到 48 或 1 到 60。

因數尼姆遊戲



準備工作： 選擇任意一個起始數字，例如 20。讓孩子決定是先手還是後手。

遊戲規則： 在玩家的回合中，他們可以從當前數字中減去任何一個它的除數。例如，從 20 開始，玩家的第一步可以選擇減去 1、2、4、5 或 10。

獲勝條件： 被迫將數字減到 0 的玩家即為輸，其他人則為贏家。

策略：

當孩子熟悉遊戲規則後，鼓勵他們尋找獲勝的簡單策略。當他們發現這個策略時，請讓他們解釋其原理。

尋找質數

基礎要求：熟練掌握所有一位數的乘法運算

埃篩法（埃拉托斯特尼篩法）



孩子們喜歡在篩子上打上叉(X)並看質數是如何被篩出的。這個調查創造了許多發現可整除性和質數有趣性質的機會。

準備一條從 1 到 25 (或者更大的數字，具體取決於空間和耐心) 的數軸。

在 2 下面寫上數字 2。在這行下面，每一個 2 的倍數都標上叉。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	2		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	

接下來，找出沒有下面標叉的最小數字 (在本例中是 3)，把它寫在下一行。寫上數字 3，並在這一行的所有 3 的倍數下面標上叉。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	2	↓	X		X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	
		3			X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	

繼續找出沒有標叉的數字，並標記它們的倍數。

完成後，你將篩出所有的質數。記住，1 是單位數，不是質數！

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	2	↓	X		X	↓	X		X	↓	X	↓	X		X	↓	X	↓	X		X	↓	X	
		3			X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	
			↓	5		↓			X		↓			X		↓			X		↓			X
						7			X		↓			X		↓			X		↓			X
									X		↓			X		↓			X		↓			X
										↓	11			X		↓			X		↓			X
												↓	13			↓			X		↓			X
																↓	17		X		↓			X
																		↓	19		↓			X
																				↓	X			X
																						↓	23	

問題

和孩子一起玩篩選遊戲的時候，可以討論以下問題：

- 為什麼篩出來的數字是質數？
- 哪個質數是最後一個您需要劃掉其倍數的數？為什麼其他質數沒有在幫助我們排除他們的倍數中發揮作用呢？
- 對於所有用於排除自身倍數的質數，哪些質數的倍數產生了新的限制，哪些沒有？答案中是否存在某種規律？
- 如果你有一個數字，比如 53，你需要用哪些質數除以它來確認它是否是一個質數？

混合運算

基礎要求：熟練掌握兩位數的加減法和一位數的乘法

混合運算



準備工作：用編號從 1 到 25 的卡片，或者孩子熟悉的數字範圍內的一組卡片。

遊戲規則：隨機抽取一張卡片作為所有人的目標數字，然後將該卡片放回牌堆。每位玩家發 5 張牌，可以按照任何順序和運算方式使用這些牌，盡可能接近目標數字。

範例：假設目標數字是 14，你拿到的是 3、6、12、17 和 20。17 - 3 或 20 - 6 可以達到目標，但只用了兩張牌。20 - 12 + 6 使用了三張牌。17 x (6 ÷ 3) - 20 或 20 - (12 ÷ (6 ÷ 3)) 使用了四張牌，如果你想用完所有的牌，這是一個更好的選擇。你能找到一種方法用完所有五張牌嗎？

計分選擇：

對於這個遊戲，有多種計分方式可供選擇。

- 對於達到目標的玩家，可以記一分。多輪累積得分。
- 玩家每輪的得分是他們的結果和目標數字之間的差值。幾輪累積得分，得分最低的玩家獲勝。
- 玩家根據使用的牌數得分，使用兩張牌達到目標得分兩分；使用幫助達到了目標得分 5 分；幫助別人達到目標得分 6 分。

括號謎題



挑戰：取一個表達式，例如 $2 + 7 \times 5 - 2 \times 2$ ，並添加括號使其得到目標結果，例如 9。

製作步驟：這些題目很容易編寫，並且可以根據孩子的技能水準進行調整。取任何一個等式，例如 $9 = (2 + 7) \times (5 - 2 \times 2)$ ，然後去掉括號。就這麼簡單！使用孩子熟悉的運算和數字。使用較短的表達式和較少的括號可以製作更簡單的題目。

混合運算

基礎要求：熟練掌握兩位數的加減法和一位數的乘法

秘密運算.....



活動

在第四章結尾處「和與差」活動中，一個人想兩個數字，然後說出這兩個數字的和與差，讓其他人找出這兩個數字。「秘密運算」使用了類似的玩法，只是現在挑戰者可以使用任何兩種運算，例如乘法和減法。

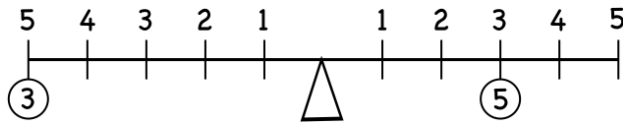
範例：挑戰者可能會說：「哪些兩個數的乘積是 12，差是 4？」也可以擴展到三個數，例如：「哪些三個數的乘積是 12，和是 8？」

槓桿平衡.....



調查

槓桿：利用槓桿原理來練習乘法和加法運算。槓桿原理告訴我們，槓桿一側的質量乘以其距離支點的距離（稱為支點距）等於該側的力。來自多個質量的力相加得到總力。為了使槓桿平衡，兩側的總力必須相等。



範例：你有兩個砝碼，一個重 3 個單位重量，另一個重 5 個單位重量，你想把它們放在支點的兩側使槓桿平衡。應該把它們放在哪裡？答案可以是距離支點分別為 5 個單位重量和 3 個單位重量，也可以是 10 個單位重量和 6 個單位重量，甚至更大，例如 15 個單位重量和 9 個單位重量。

如果你要把一個重 3 個單位重量的砝碼和一個重 5 個單位重量的砝碼放在槓桿的一側，那麼另一側可以放哪些砝碼，放在什麼位置才能使槓桿平衡？如果這兩個砝碼分別放在槓桿的兩側會怎樣？這個問題延續了第四章末尾「計數」頁面中的問題。

乘法和倍數

基礎要求：熟練掌握所有一位數的乘法運算

嗶聲遊戲



準備工作：讓玩家們圍坐成一個圈。首先確定一組數字，用於本輪遊戲。選擇任何一群有趣的數字，或者可以練習某個概念的數字。一些常見選項包括：

- 奇數或偶數
- 3 的倍數 (或其他某個數字的倍數)
- 3 的倍數和 7 的倍數
- 既不是 5 的倍數又是 3 的倍數
- 3 的倍數以及數字本身含有數字 3
- 質數

遊戲規則：玩家們按順時針順序輪流說出數字，從 1 開始。當玩家說出屬於選定組的數字時，他們必須說「嗶」代替那個數字。如果玩家忘記說「嗶」或者為錯誤的數字說了「嗶」，則出局。

獲勝條件：最後剩下的玩家獲勝！

三連勝



準備工作：使用一副包含 Q (代表 0)、A (代表 1) 和 2 - 9 的撲克牌，或者使用四套從 0 到 9 的數字卡片。在一張紙上畫出一個 4 行 5 列的表格，其中 20 個空格隨機填入 5 和 10 的倍數。為每個玩家準備一套棋子。

遊戲規則：隨機抽取一張牌，並將你的棋子放在該數字乘以 5 或 10 的位置，你自己選擇乘以 5 還是 10。一旦該位置被占據，另一名玩家就不能將棋子放在那裡。

獲勝條件：第一個率先連成三枚棋子的玩家獲勝。

其他玩法

可以將數字 5 和 10 換成其他成對的數，例如 2 和 4 或者 3 和 6。成對的數字可以幫助練習乘法的翻倍策略。例如，如果玩家不知道 6×7 等於多少，他們可以計算 3×7 的兩倍。

乘法和乘法表

基礎要求：熟練掌握所有一位數的乘法運算

乘法大戰.....



準備工作：取一副撲克牌，去除所有花牌後將剩下的數字牌平均分給兩個玩家。為了更加專注地練習乘法，也可以去除 A 和 10。

遊戲規則：每位玩家翻開兩張牌，計算它們的乘積。乘積較大的玩家贏得那四張牌。如果兩個玩家的乘積相同，則雙方再翻開兩張牌，乘積較大的玩家贏得所有八張牌。

獲勝條件：在規定時間內，擁有最多牌的玩家獲勝。

顛倒乘法表.....



直接填寫標準乘法表可能會讓孩子感到枯燥，他們很快就會發現可以使用重複加法而不是乘法來完成填空。為了真正練習乘法，以及練習解決問題和因式分解，可以創建一個混亂的乘法表。

創建方法：製作這些表格的方法是將行和列上下移動，然後去掉中間的大部分標題和數字。

X	5				6			
2								
		40						
				49				
	20					36		
		72						
			9					12
					48			

範例：以下是一個使用 2 到 9 的標題的例子：

解決方法：從獨特的數字開始推理。

20 意味著它所在的行是由 4 乘出來的，而 36 所在的列是由 9 乘出來的。

49 意味著它所在的列和行是由 7 乘出來的。9 意味著它所在的列和行是由 3 乘出來的

繼續以這種方式推理，隨著標題的確定，逐步填空表格。

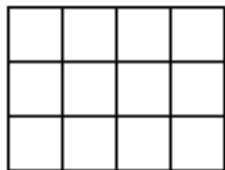
難度等級：透過省略更多或更少的數字來增加或降低難度。在這個例子中，5 列中的「5」可以省略 - 20 中必須包含 5 的因數，而這個因數不可能來自 20 所在的行，因為該行中有 36。

讓孩子自己製作：讓孩子為你製作這樣一個謎題吧！製作謎題需要思考很多。

矩形面積

基礎要求:熟練掌握一位數乘法和兩位數加法

引言



矩形的面積等於它的長乘寬。這個枯燥的陳述可以透過至少兩種方式讓孩子更容易理解。

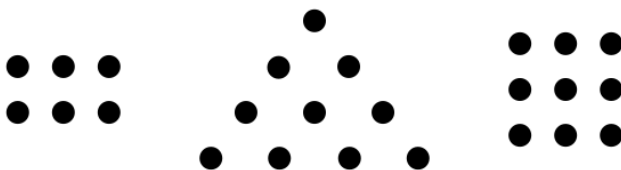
第一種方法是將矩形分解成由許多正方形組成的網格。第二種方法是使用數字圖形來觀察如何將某個數量 (例如 12) 放置在一個陣列中 - 例如 3×4 、 2×6 或 1×12 。以矩形面積做遊戲能幫助我們練習乘法和因式分解！

重溫數字形狀

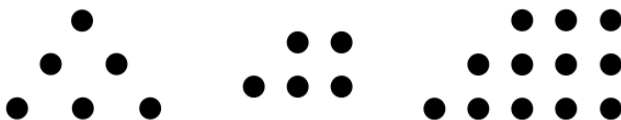


從大量小物體 (例如葡萄乾) 開始。對於每個數字，探索可以用這些物體制作什麼樣的矩形或者其他形狀。

矩形：矩形的邊長是可以整除該數字並且互相乘積等於該數字的值。製作矩形是直接體驗可整除性的方法。



單位數、質數、合數：1 是單位數，只能用 1×1 的正方形表示。5 這樣的只能用扁平矩形表示的數字稱為質數。不是單位數或質數的數字稱為合數，因為它們是由質數相乘而成，例如 $12 = 2 \times 2 \times 3$ 。9 這樣的數字稱為平方數，因為它們的一個矩形是正方形——面積為9 的一個矩形是 3×3 的正方形。



梯形數：還有其他有趣的形狀可以探索。例如，哪些數字是梯形數？這些數字可以表示成樓梯狀 (即每一層長度變化 1) 嗎？如果將三角形數包含在此組中，答案會令人驚訝——它是不等於 2 的冪的所有數！

矩形面積遊戲

基礎要求：熟練掌握一位數乘法和兩位數加法

圍欄遊戲



準備工作：每位玩家都需要一張方格紙。

遊戲規則：玩家輪流使用兩張 1 到 10 區間內的數字卡片來確定矩形的長和寬。如果玩家的紙張空間足夠，可以將矩形放置在任何內部不與現有矩形重疊的位置。放置完成後，將內部塗上陰影並寫上其面積和尺寸。如果沒有位置放置矩形，則該玩家跳過此輪。

獲勝條件：總面積最大的玩家獲勝。

其他玩法

對於普通方格紙來說，這可能是一個很耗時的遊戲。可以透過使用一半的紙張或限制回合數來縮短遊戲時間。

分割盒子



			3
4	3		
	2		
4			

挑戰：將一個 4 x 4 或更大的矩形（其某些正方形內包含數字）分成更小的矩形。每個數字必須單獨放置在一個區域等於該數字的矩形中。

製作步驟：在孩子看不到的情況下，先用較小的矩形填滿大矩形來設置這些謎題。然後將每個矩形的面積寫在其內部。最後，只給孩子包含數字的大矩形。

解題策略：

解這些謎題時，首先觀察質數的面積。它們形狀的限制比較多。接下來，考慮被包圍的區域。在這個謎題中，上面的「4」必須與左上方的 2 x 2 正方形相關。此外，右上角必須用於一個垂直的 3 x 1 矩形。

感受冪

基礎要求：熟練掌握一位數乘法運算

定義與規則

定義：就像 4×2 是 $2 + 2 + 2 + 2$ 的簡寫一樣， 2^4 是 $2 \times 2 \times 2 \times 2$ 的簡寫。說出「2 的四次方」比重複地說「二乘二再乘二……」更容易理解和表達。

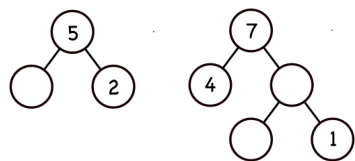
特殊名稱：二次方，例如 4^2 ，可以稱為四的平方，三次方，例如 4^3 ，可以稱為四的立方。

規則：相同數的冪相乘時，遵循一個簡單的規則來簡化結果 - 即指數相加。例如，計算 $4^2 \times 4^3 = (4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4) = 4^5$ ，我們有兩個四乘以三個四，因此結果是五個四相乘。

注意：請注意，這個指數相加的規則只適用於同一數的冪次方。諸如 $3^2 \times 5^3$ 的乘法運算並不能直接透過這種方式簡化。

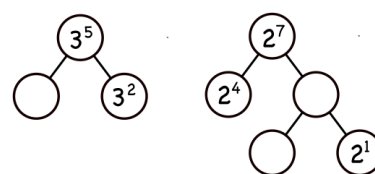
重用舊的加法活動

重用謎題和遊戲：由於冪相乘時指數相加，我們以前所有涉及加法的遊戲和謎題都可以用於練習乘方運算。以下是一些曾學過的加法運算活動範例：第三章 - 形狀求和和組合求和；第四章 - 封閉式求和、數形結合和修復問題。



左邊是第三章的兩個「形狀求和」範例。

右邊是使用乘法代替加法的相同範例「形狀乘積」。



練習冪次方會變得像原來的加法問題一樣熟悉和容易。

其他玩法：如果您的孩子喜歡這些問題並且想要額外的挑戰，可以開始涉及多個數字的冪次方運算。例如，如果您計算 $(4^2 \times 3^3) \times (4^5 \times 3^2)$ ，您可以將該規則分別應用於 4 的冪和 3 的冪，得到結果 $4^7 \times 3^5$ 。

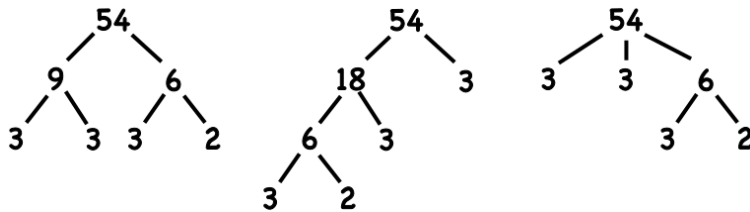
探索質因數分解

基礎要求：能熟練地進行一位數乘法運算

因式樹 - 探索活動



因式樹模型是對上一頁「感受幕」中「圖形乘積」的擴展。創建因式樹的目標是將一個數字分解成它的質因數。在構建因式樹的過程中，可以了解有關該數字的許多資訊。



範例：每棵樹最終都會在其葉子上產生相同的質數。在每種情況下，我們最終得到 $2 \times 3 \times 3 \times 3$ ，但看看不同的到達方式！

問題

做了一些類似練習之後，您的孩子可能會自然而然地開始提出一些問題：

- 為什麼某些樹比其他樹有更多的層次？
- 為什麼某些樹比其他樹更寬？
- 為什麼葉子節點總是停留在質數上？
- 為什麼葉子節點總是具有相同的質數列表，只是順序可能不同？

基本定理：這個最後一個問題是一個非常重要的話題，稱為算術基本定理。它說明一個數字有唯一的方式寫成質數的乘積！

為什麼這很重要？它表明質數是數字的乘法「積木」，一旦你找到了一種構建數字的方法，那就是唯一的方法。如果你知道 $54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$ ，那麼就無法使用整數來寫成 $54 = 5 \times ??$ 。質因數分解的唯一性是許多奇妙數論問題的核心。

用質因數分解進行練習

基礎要求：熟練進行一位數乘法運算

練習質因數分解



在旅行或空閒時按順序進行質因數分解練習。還可以練習談論冪。輕鬆掌握質因數分解將有助於將來學習許多知識，例如分數運算。玩得開心，進行該活動要適度，讓孩子感覺舒適。

背誦口訣

口訣如下：

- | | | | |
|-------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1. 是單位數 | 7. 是質數 | 13. 是質數 | 19. 是質數 |
| 2. 是質數 | 8. 是 2 的立方 | 14. 是 2×7 | 20. 是 2 的平方 $\times 5$ |
| 3. 是質數 | 9. 是 3 的平方 | 15. 是 3×5 | 21. 是 3×7 |
| 4. 是 2 的平方 | 10. 是 2×5 | 16. 是 2 的四次方 | 22. 是 2×11 |
| 5. 是質數 | 11. 是質數 | 17. 是質數 | 23. 是質數 |
| 6. 是 2×3 | 12. 是 2 的平方 $\times 3$ | 18. 是 2×3 的平方 | 24. 是 2 的立方 $\times 3$ |

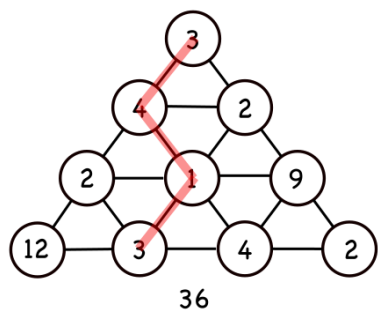
當孩子遇到困難時，不要急於給出答案，引導他們思考並找到解決問題的方法。

乘積金字塔



這些謎題是第四章看到的加法金字塔的乘法版本。我們會提供一個目標數字和一個數字金字塔。

挑戰：挑戰是找到金字塔中向下連接的數字路徑，使所選數字的乘積等於目標數字。



在這個金字塔中，目標是 36，紅色線條表示有效的路徑。

這些謎題如果先進行目標的質因數分解會更容易解決。因為 $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ ，所以這些質因數必須在路徑中選擇，這有助於指導搜索。

知道質因數分解也可以使創建這些謎題變得更加容易。

加減練習

基礎要求：理解兩位數的位值以及它與加減運算的關係

100就笑.....



準備工作：準備一副撲克牌，其中 Q 代表 0，A 代表 1，2 - 9 代表它們本身的數字。將目標數字設置為 100。隨機抽取四張牌並按順序排列，用它們組成兩組兩位數，作為公共數位資源。

遊戲規則：每位玩家隨機抽取 14 張牌，正面朝上擺放。玩家輪流抽牌，在自己的回合中，玩家必須從他們手中所有牌拿出任意兩張，分別放置在公共資源的四張牌中的任意兩張牌上。如果當前的兩組兩位數相加等於目標數字 100，則玩家得 1 分。遊戲名稱取自一個可選動作，即玩家每次成功達到目標金額時都可以笑一聲。

獲勝條件：當所有牌都用完後，得分最多的玩家獲勝。

其他玩法

- 將目標數字設置為 100 有助於練習 10 的組成數。然而，設置其他數字為目標也可以提供多樣性並練習其他類型的組成數。
- 給玩家多於或少於 14 張的牌。
- 將減法與較小的目標數字結合使用。

5 張牌實現目標.....



準備工作：選擇一個目標數字，例如 100。

遊戲規則：每位玩家從 0 到 9 隨機抽取五張牌。用這五張牌中的四張組成兩個兩位數，而不使用第五張牌。將這兩個數字相加，最接近目標數字的玩家得分 1 分。

獲勝條件：在規定輪數後得分最高者獲勝。

其他玩法

一種選擇是使用三位數、定目標數字為 1000，每位玩家抽取七張牌。另一種選擇是進行減法運算和設定較小目標數字。

字母替換

基礎要求：理解兩位數的數位概念及其與加減運算的關係

字母替換.....



智力遊戲

準備工作：在這些謎題中，單個數字被字母代替。乍一看，這些謎題似乎與本章前面看到的「缺失的數字」謎題相同。然而，用字母為解決問題提供了更有趣的機會。如果您的孩子已經熟悉「缺失的數字」謎題，則可以過渡到這些謎題。

字母的使用遵循以下三個規則：

三個規則

- 每個字母始終表示 0 到 9 之間的某個數字
- 數字的最左側位永遠不是 0
- 不同的字母必須代表不同的數字

製作步驟：列出一個普通的加減法問題，替換一個或多個數字。用相同的字母替換相同的數字。在本例中，6 在兩個位置都被替換為「A」。

$$\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array} \quad \dashrightarrow \quad \begin{array}{r} 23 \\ +4A \\ \hline A9 \end{array} \quad \begin{array}{r} B3 \\ +4A \\ \hline A9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} B \\ +8 \\ \hline C \end{array} \quad \begin{array}{r} B \\ +B \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +A \\ \hline C4 \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +2 \\ \hline BC \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A \\ +B \\ \hline AC \end{array} \quad \begin{array}{r} A \\ +BB \\ \hline A7 \end{array} \quad \begin{array}{r} B \\ +AB \\ \hline BA \end{array} \quad \begin{array}{r} BA \\ +BB \\ \hline CAB \end{array}$$

特殊謎題：這種類型的謎題可以創造出有趣的解題挑戰。這些謎題的設計要費不少心思，但會帶來一些有趣的思考過程。

請注意，字母的值不會在不同的謎題之間延續。在第一個謎題中值為 1 的「B」，在第二個謎題中值為 4。

圖形填充

基礎要求：探索圖形的形狀和規律的好奇心和堅持

用圖形填充區域.....



想像你有一個 8×8 的西洋棋棋盤和一套 1×2 的棋子。用 32 個這樣的棋子完全覆蓋棋盤的方法很簡單。

移除角落：讓我們開始嘗試從棋盤上移除部分正方形。如果移除棋盤的一個角，你馬上就會知道你無法再用棋子覆蓋棋盤，因為棋子會覆蓋偶數個正方形，而現在只剩下 63 個正方形了。好，移除兩個角使剩下的正方形變成偶數個——現在你可以用棋子覆蓋它了嗎？答案取決於你移除的哪兩個角。為什麼？如果不再限制自己只移除角落，又會發生什麼事呢？

從細節處學習：解決這類問題的一個重要方法是從較小的例子中學習。首先嘗試在 4×4 或 6×6 的棋盤上進行這些嘗試。

其他玩法

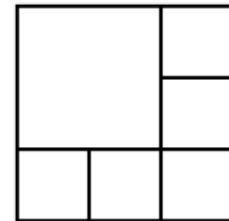
嘗試使用其他形狀來填充棋盤。嘗試用 1×3 的棋子或 3 個正方形組成的 L 形的來填充它。你發現了哪些規律和規則？還有哪些有趣的形狀可以用來嘗試？

用正方形填充正方形.....



挑戰：用其他正方形填充一個正方形，這些正方形不必都大小相同。問題是：有多少種可能的正方形數量？對於那些可能的，是否有簡單的方法來描述如何做到？

讓孩子花幾天時間玩這個遊戲，不要急於得到答案。下圖展示了如何用 6 個正方形填充正方形的例子。



其他玩法

如果您只允許使用特定大小的正方形，例如 1×1 、 2×2 和 3×3 ，會發生什麼事？用相同形狀的圖形填充其他圖形會發生什麼事？例如，使用所有邊長度相同的正三角形。還有哪些圖形可以用這種方式進行有趣的探索？

乘法和倍數

基礎要求：熟練進行一位數乘法運算並能跳著數到 100

乘積遊戲



準備工作：使用一張公用的紙，按照如圖所示填寫。

遊戲規則：第一位玩家將標記放在1 - 9方格中的任意一個數字上(1-9)。第二位玩家將另一個棋子放在1 - 9方格中的一個數字上，並說出6 x 6表格中相應位置的乘積。之後，每位玩家都可以選擇移動他們任意一枚棋子並說出新的乘積(如果可以)。

獲勝條件：第一個在橫、豎、斜任意一行上連成3個標記的玩家獲勝。

其他玩法：混合乘積數字，以幫助您的孩子更好地識別乘積。另請參閱第五章的擴展材料，了解更大範圍的更大棋盤設計。

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

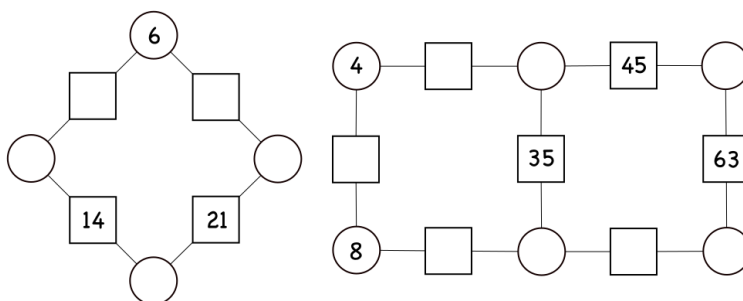
乘積跳島



智力遊戲

這些謎題由島嶼（圓形和方形）和橋梁（線）連接而成。如果正方形的兩側各有一個圓圈，則正方形表示這兩個圓圈的乘積。

挑戰：填入缺失的數字。



如何創建：通過先填入圓圈，然後填入正方形，最後在將謎題交給孩子之前刪除一些數字。

除了練習乘法之外，這些謎題還可以用來練習公因數相關的運算。在第一個謎題中，除1之外，唯一能同時除14和21的數字是7，因此它是底部圓圈中的數字。

加、減、乘

基礎要求：熟練進行兩位數加減法和一位數乘法

計算相鄰數字



準備工作： 使用三個骰子和一個標有1到64的8 x 8數字棋盤。

遊戲規則： 玩家擲骰子，並使用加、減、乘、除運算得到棋盤上任何未標記的數字。玩家標記該方格，並獲得該方格的分數 + 其周圍每個已標記方格(包括斜角)的分數。如果玩家無法完成操作，任何可以完成操作的其他玩家都可以獲得該分數。

獲勝條件： 進行五輪或更多輪遊戲，得分最高者獲勝。

其他玩法

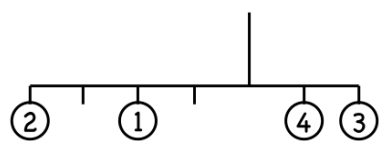
遊戲可以選擇使用第四個骰子，也可以使用更小或更大的棋盤。

製作平衡掛飾



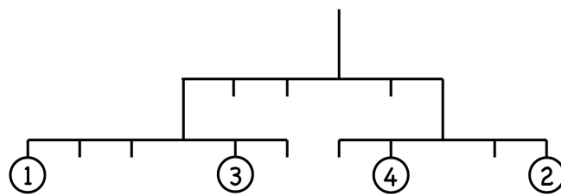
智力遊戲

準備工作： 準備一些配重和一個帶有若干個掛鉤的平衡掛飾設計圖。挑戰是在每個掛鉤上最多放置一個配重，使平衡掛飾沿每個臂保持平衡。假設連接的線沒有重量。每個平衡掛飾的臂都是需要平衡的槓桿，因此這些謎題是本章之基礎要求供的「槓桿平衡」謎題的延伸——在開始解答這些謎題之前練習那些謎題。



簡單範例： 從最簡單的平衡掛飾開始，它們就像懸空的槓桿。以下是如何在這個平衡掛飾上放置1到4的配重使其平衡。這是可行的，因為 $2 \times 4 + 1 \times 2 = 4 \times 1 + 3 \times 2$ 。

更複雜的範例： 使用下方配重的總和來平衡頂部金屬絲的兩側 $(1 + 3) \times 3 = (4 + 2) \times 2$ 。



有關更多範例和平衡掛飾的更深入討論，請參閱第五章拓展材料。

加、減、乘

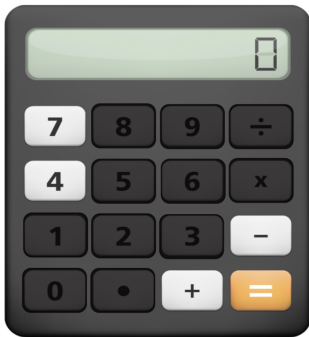
基礎要求：能熟練進行兩位數加減法和一位數乘法

故障計算器.....



準備工作： 假設你有一個壞了的計算器，你面臨著在計算器上算出某個結果的挑戰。這是一個隨時可以進行的口頭遊戲。以下是一些入門範例。

範例： 假設你的計算器只有加 (+)、減 (-)、乘 (x) 和除 (÷) 功能，但只有一個數字鍵 4 可以使用。你能算出 21 嗎？如果可以，你需要最少的步驟是幾步？假設你最多只能使用數字 4 四次，你能算出哪些數字。假設你必須使用數字 4 恰好四次又會有什麼結果？嘗試使用其他單個數字鍵並算出其他結果。



範例： 假設你的計算器只能加 4 或 7。你能算出哪些數字？

範例： 假設計算器只有 4 或 7，但現在它可以加減。你還能算出哪些數字？

這些練習與我們之前在其他場景中看到的 (例如天平秤) 是一樣的。

範例： 假設你只有一個 1 鍵，只能加或翻倍。例如， $2 \times (2 \times 1) + 1$ 是 5。你還能創造哪些數字？

範例： 一個有趣的挑戰是「四個4」的挑戰。假設你有一個只有一個 4 鍵的計算器，所有運算符都可以使用。從 1 開始，如果你必須在計算器上使用四個 4，你可以創建多少個數字？

因數和倍數

基礎要求：能熟練進行一位數乘法，並逐漸掌握因式分解

抓因數



準備工作：使用一個標有 1 到 24 的 4 x 6 數字方格的棋盤。

遊戲規則：輪到玩家時，從沒有被覆蓋的數字中選擇一個至少有一個未被覆蓋的因數 - 玩家獲得所選數字，另一位玩家可以獲得任何或所有未被覆蓋的因數 (可以自由選擇數量)。輪流進行，直到沒有可選擇的數字為止。

獲勝條件：玩家計算各自的數字總和，得分較高者獲勝。

稅收單人遊戲：這也可以作為單人謎題玩，稱為稅收官。一個玩家選擇每個數字，稅收官得到所有可用的因數。繼續玩，直到玩家沒有合法的移動。此時，稅收官得到剩餘的數字。目標是盡可能大的總和——盡可能超過稅收官。

其他玩法

為玩家設置數字範圍——可以是 1 到 12，也可以是 1 到 60。

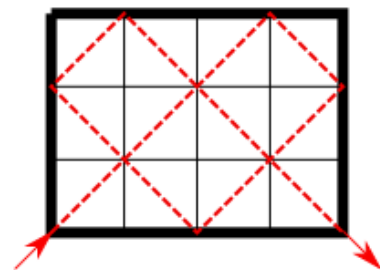
反彈撞球



想像一個撞球桌，每個角落都有一個球袋。當球從撞球桌的側面反彈時，它會以與入射角相同的角度反彈出去。

這次探索的問題是：如果我們以 45 度角從一個角落射出一個球，它最終會落在哪裡？

答案取決於撞球桌的大小。下圖展示了在 3 x 4 的撞球桌上會發生什麼事。



在玩過幾種不同大小的撞球桌後，挑戰你的孩子提前預測新尺寸的答案。從左下角開始，哪個角落將首先被擊中，需要多少次反彈？

因數個數

基礎要求：能熟練進行一位數乘法，並逐漸掌握因式分解

雙倍驚喜



準備工作： 玩家們先各自選取 5 個不同的數字，範圍大於 20 且小於 121。所有人選擇完成後，將數字寫在所有玩家都能看到的地方。

遊戲規則： 使用數字卡片或其他工具生成 1 到 20 的隨機數。這個數字會一直翻倍，直到某個玩家的數字首次被命中，或者這個數字變為大於 120。

獲勝條件： 首位五個數字都被命中的玩家獲勝。

選數策略

選擇諸如 46 之類的數字並不是一個好策略，因為 46 不是 2 的冪乘以 1 到 20 之間的某個數字 - 它永遠不會被命中。一些有許多 2 的因子的數字，例如 32，更容易被命中，因為更多的起始數字可以到達它們。

其他玩法

每次可以將數字乘以 3 而不是翻倍。每次可以翻倍並加 1。對於年齡較小的玩家，可以選擇範圍大於 10 且小於 60 的數字，並從 1 到 10 生成隨機數。

因子之戰



準備工作： 準備兩組卡片，例如 1 到 25。

遊戲規則： 使用這些卡片玩標準的「戰爭」遊戲，但現在獲勝者是擁有更多因子的卡片。例如，12 比 16 大，因為 12 有 6 個因子 (1、2、3、4、6 和 12)，而 16 有 5 個因子 (1、2、4、8 和 16)。獲勝卡的持有者必須能夠正確列出其因子才能贏得卡片 - 否則，卡片將被洗回每個玩家的抽牌堆。與標準的「戰爭」遊戲一樣，當出現平局時，翻開下一張卡，獲勝者獲得所有卡。

其他玩法

也可以玩「較少的因子獲勝」的遊戲。只計算素因數的總數，而不是所有因數。可以玩「質數冪 (質數的冪次方) 擊敗其他數字」的遊戲。

乘法棋盤遊戲

基礎要求：一位數乘法和順數

穿越火山.....



準備工作： 使用一份 100 以內的數字表格，將四個邊緣的36個正方形塗成灰色。使用去掉了人頭牌的撲克牌，或者使用 1 到 10 的數字卡片。

遊戲規則： 輪到玩家時，如果抽到 1，則可以選擇任何奇數；如果抽到其他任何數字，則可以選擇它的任何倍數。如果玩家說了一個數字，則對手就不能說該數字。目標是在表格的任何一條邊緣創建一個通向另一條邊緣的路徑。玩家不必按照路徑的順序來構建正方形。

其他玩法

您可以設定斜線連接是否被允許。另一種選擇是加入人頭牌 - 如果抽到人頭牌，則可以放置一個阻擋格，該格子不能包含在任何玩家的路徑中。

跳棋數學遊戲.....



準備工作： 這個遊戲從跳棋中汲取靈感。每個玩家有 10 個棋子。棋子編號為 1 到 10，其中「10」號棋子標有10和11。棋子最初放置在100以內數字表格的末行上。一個玩家放在 1 到 10 的正方形上，另一個放在 91 到 100 的正方形上。

遊戲規則： 最初，棋子只能根據所選標記上的數字 (或數字) 的任何倍數向前移動一行——對於從1到10開始的玩家，向前意味著更大的數字，對於從91 到 100 開始的玩家，向前意味著更小的數字。一旦棋子穿過整個棋盤，它就變成「王」，然後可以向前或向後移動一行。通過落在對手的棋子上可以吃掉對方的棋子。玩家的棋子不能與相同玩家的其他棋子重複放置。

獲勝條件： 吃掉所有對手的棋子即可獲勝。

其他玩法

對於年齡較小的玩家，可以將棋盤縮短到前 6 行 - 1 到 60 的數字。還不熟悉所有倍數的孩子可以使用順數來計算移動。

有趣的乘積

基礎要求：一位數乘法和順數

乘法賓果



準備工作：每個玩家開始時擁有一個 4 x 4 的表格，表格中填入可能的乘積數字。這些數字可以隨機分配，也可以由玩家仔細選擇。

遊戲規則：首先，發兩張牌並朝上放置在桌面上。如果任何玩家擁有這兩個數字的乘積，他們就可以用標記蓋住它。從那時起，玩家輪流從牌堆頂部取牌，並選擇替換兩張牌中的哪一張。所有擁有匹配乘積的玩家都可以用標記蓋住它。

獲勝條件：最先得到 4 個相連的玩家獲勝。

互乘謎題



這種乘法謎題可以是 3 x 3 的，包含 1 到 6 的每個數字恰好一次，也可以是 4 x 4 的，包含 1 到 8 的每個數字恰好一次。

挑戰：填入一些空格，每行和每列填入兩個數字，使一行中數字的乘積等於最左邊標註的數字，並且一列中數字的乘積等於列頂端標註的數字。某些行或列可能沒有標註 - 如果是這樣，則這些行或列的乘積沒有任何限制。

解答範例：透過找到可以確定兩個數字的行和列來解決這個謎題。30 列必須有 5 和 6，10 行必須有 2 和 5。接下來，12 列必須有 3 和 4，4 行必須有 1 和 4。其他部分很容易完成。

		30	12	
4				
10				

 →

		30	12	
4	1		4	
10	2	5		
		6	3	

	7	40	18	
5				
21				
32				

 →

	7	40	18	
5		2		6
21	1		5	
32	7			3
		4	8	

這個謎題的 5 行必須有 1 和 5，21 行有 3 和 7，32 行有 4 和 8，頂行通過排除法得到 2 和 6。7 列有 1 和 7，40 列有 5 和 8，18 列有 3 和 6，第二列有 2 和 4。將這些資訊組合起來得到答案。

如何創建：與許多此類謎題一樣，家長可以先填寫謎題內部的數字，記下乘積，然後刪除所有內部數字來製作謎題。